Chapitre 07 - Mouvement dans un champ de gravitation-Corrigé

QCM

1 La proposition A n'est pas une bonne réponse car la trajectoire d'une planète n'est pas une ellipse dans le référentiel géocentrique.
La proposition B n'est pas une bonne réponse car la trajectoire d'une planète n'est pas une ellipse dans le référentiel terrestre.
La proposition C est une bonne réponse.

2 La proposition A n'est pas une bonne réponse car, d'après la première loi de Kepler, la planète est située à l'un des foyers de l'ellipse, donc pas au centre de celle-ci.
La proposition B est une bonne réponse.
La proposition C n'est pas une bonne réponse car, d'après la première loi de Kepler, la planète est située à l'un des foyers de l'ellipse, donc pas sur l'orbite de la planète.

3 La proposition A n'est pas une bonne réponse car, d'après la troisième loi de Kepler, la période de révolution au carré est proportionnelle au cube du demi-grand axe, ce qui ne correspond pas à la relation donnée.
La proposition B est une bonne réponse.
La proposition C peut être une bonne réponse.

4 La proposition A n'est pas une bonne réponse car la vitesse est constante sur une trajectoire circulaire.
La proposition B n'est pas une bonne réponse car l'accélération n'est pas nulle, sa valeur est $a = \dfrac{v^2}{R}$.
La proposition C est une bonne réponse.

5 La proposition A n'est pas une bonne réponse car, d'après la deuxième loi de Kepler, les aires balayées sont égales, donc $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_3$.
La proposition B n'est pas une bonne réponse car, d'après la deuxième loi de Kepler, les aires balayées sont égales donc $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_3$.
La proposition C est une bonne réponse.

6 La proposition A n'est pas une bonne réponse car le vecteur vitesse n'est pas constant mais sa valeur l'est.
La proposition B est une bonne réponse.
La proposition C n'est pas une bonne réponse car l'accélération n'est pas nulle, sa valeur est $a = \dfrac{v^2}{R}$.

7 La proposition A n'est pas une bonne réponse car l'expression de la vitesse sur une orbite circulaire est $v = \sqrt{\dfrac{G \cdot M}{r}}$.
La proposition B est une bonne réponse.
La proposition C est une bonne réponse.

8 La proposition A n'est pas une bonne réponse car la période est de :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{G \cdot M_T}} = 2\pi\sqrt{\frac{(6{,}4\times10^6 + 800\times10^3)^3}{6{,}67\times10^{-11}\times5{,}97\times10^{24}}}$$
$$= 6\ 083\ \text{s}$$

La proposition B est une bonne réponse.
La proposition C n'est pas une bonne réponse car la période est de 6 083 s.

9 La proposition A est une bonne réponse.
La proposition B n'est pas une bonne réponse car elle ne correspond pas à la rotation de la Terre sur elle-même.
La proposition C n'est pas une bonne réponse car elle ne correspond pas à la période de rotation de la Terre sur elle-même.

10 La proposition A est une bonne réponse.
La proposition B n'est pas une bonne réponse car un satellite géostationnaire doit être synchrone mais aussi avoir une orbite sur le plan équatorial de la Terre.
La proposition C n'est pas une bonne réponse car le satellite doit avoir une altitude de 36 000 km afin que sa vitesse de rotation soit identique à celle de la Terre.

12 **1.** Il s'agit d'un référentiel jovien, ou jupitérocentrique, ou encore le centre de Jupiter associé à un repère orienté vers des étoiles lointaines.

2. On voit sur la représentation que Jupiter n'est pas au centre de l'orbite de Thémisto.

3. D'après la première loi de Kepler, l'orbite est une ellipse et Jupiter est placée à l'un des foyers de l'ellipse.

4. On a $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$, les temps de parcours des arcs de cercle sont identiques. En effet, il y a le même nombre de points. D'après la deuxième loi de Kepler, le segment reliant la planète au satellite balaye des aires égales pendant des durées égales.

5. D'après la deuxième loi de Kepler, les aires sont égales. Pour que les aires soient égales, comme la distance entre Jupiter et Thémisto est plus importante dans le cas de $\mathcal{A}_1$ que dans le cas de $\mathcal{A}_2$, il faut que la distance parcourue soit plus importante dans le cas de $\mathcal{A}_2$ que dans le cas de $\mathcal{A}_1$. Si la distance parcourue est plus importante pour $\mathcal{A}_2$ que pour $\mathcal{A}_1$, pour un même temps de parcours, alors la vitesse de Thémisto est plus importante pour $\mathcal{A}_2$ que pour $\mathcal{A}_1$.

6. L'écartement entre les points est plus important pour $\mathcal{A}_2$ que pour $\mathcal{A}_1$. La vitesse de Thémisto est donc plus importante lors du parcours de $\mathcal{A}_2$ que pour $\mathcal{A}_1$.

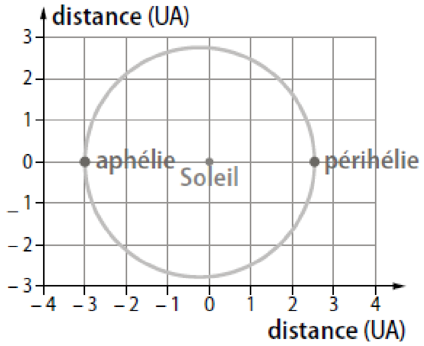
13 **1.** On remarque que la distance Mars-Soleil n'est pas constante. Cela signifie que la trajectoire n'est pas circulaire mais elliptique, comme le montre la 1re loi de Kepler.

2. D'après la 1re loi de Kepler, le Soleil est placé à l'un des foyers de l'orbite elliptique.

3. La vitesse est maximale lorsque Mars est au plus proche du Soleil et minimale au plus loin.

14 **1.** On remarque que la distance Cérès-Soleil n'est pas constante. Cela signifie que la trajectoire n'est pas circulaire, mais qu'il s'agit d'une ellipse, comme le montre la première loi de Kepler.

2.



3. On a :

$2a_C = 4{,}47 \times 10^8 + 3{,}81 \times 10^8 = 8{,}28 \times 10^8$ km

Soit $a_C = \dfrac{8{,}28 \times 10^8}{2} = 4{,}14 \times 10^8$ km

4. En utilisant la troisième loi de Kepler, on trouve :

$$\frac{T_C^2}{a_C^3} = \frac{T_T^2}{a_T^3}$$

$$\text{Donc : } T_C = \sqrt{\frac{a_C^3}{a_T^3}} \times T_T = \sqrt{\frac{(4{,}14 \times 10^8)^3}{(1{,}50 \times 10^8)^3}} \times 365{,}25$$
$$= 1{,}67 \times 10^3 \text{ jours}$$

---

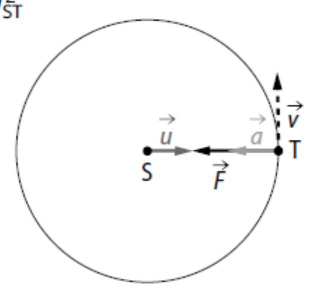
16 $\dfrac{T^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2}{G \cdot M_J}$, donc $M_J = \dfrac{4\pi^2 \cdot a^3}{G \cdot T^2}$

$$M_J = \frac{4\pi^2 \times (1{,}07 \times 10^9)^3}{6{,}67 \times 10^{-11} \times (7{,}15 \times 24 \times 3\,600)^2}$$
$$= 1{,}90 \times 10^{27} \text{ kg}$$

---

17 **1.** Il s'agit du référentiel géocentrique.

2. $\vec{F} = -G\dfrac{M_S \cdot M_T}{d_{ST}^2}\vec{u}$



3. D'après la deuxième loi de Newton, on a :

$$M_T \cdot \vec{a} = \vec{F} = G\frac{M_S \cdot M_T}{d_{ST}^2}\vec{n}$$

Or l'accélération dans le repère de Frenet s'écrit :

$\vec{a} = \dfrac{dv}{dt}\vec{\tau} + \dfrac{v^2}{d_{ST}}\vec{n}$, donc la relation précédente devient :

$$M_T\frac{dv}{dt}\vec{\tau} + M_T\frac{v^2}{d_{ST}}\vec{n} = G\frac{M_S \cdot M_T}{d_{ST}^2}\vec{n}$$

Ainsi, en effectuant la projection sur $\vec{\tau}$, on obtient :

$M_T \cdot \dfrac{dv}{dt} = 0$, donc $\dfrac{dv}{dt} = 0$.

La vitesse est donc constante, le mouvement de la Terre est uniforme.

4. En projetant sur $\vec{n}$, on obtient :

$M_T \cdot \dfrac{v^2}{d_{ST}} = \dfrac{M_S \cdot M_T}{d_{ST}^2}$. En simplifiant, on trouve :

$v^2 = G\dfrac{M_S}{d_{ST}}$ soit $v = \sqrt{\dfrac{G \cdot M_S}{d_{ST}}}$.

$$v = \sqrt{\frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 1{,}99 \times 10^{30}}{149{,}6 \times 10^9}}$$
$$= 2{,}98 \times 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

5. On a $v = \dfrac{2\pi \cdot d_{ST}}{T_T}$. En remplaçant la vitesse par la relation précédente, on obtient :

$T_T = 2\pi\sqrt{\dfrac{{d_{ST}}^3}{G \cdot M_S}}$ soit :

$$T_T = 2\pi\sqrt{\frac{(149{,}6 \times 10^9)^3}{6{,}67 \times 10^{-11} \times 1{,}99 \times 10^{30}}}$$
$$= 3{,}16 \times 10^7 \text{ s} = 365 \text{ jours}$$

---

18 **1.** Le référentiel géocentrique.

2. On considère que la seule force appliquée au satellite est la force d'attraction exercée par la Terre sur celui-ci. Ainsi, d'après la deuxième loi de Newton on a :

$$m_S \cdot \vec{a} = \vec{F} = G\frac{M_T \cdot m_S}{(R_T + h)^2}\vec{n}$$

Or l'accélération dans le repère de Frenet s'écrit $\vec{a} = \dfrac{v^2}{R_T + h} \cdot \vec{n}$, donc la relation précédente devient :

$$m_S \cdot \frac{v^2}{R_T + h} \cdot \vec{n} = G\frac{M_T \cdot m_S}{(R_T + h)^2}\vec{n}$$

En projetant sur $\vec{n}$, on obtient :

$$m_S \cdot \frac{v^2}{R_T + h} = G\frac{M_T \cdot m_S}{(R_T + h)^2}.$$

En simplifiant les différents termes, on trouve :

$$v^2 = G\frac{M_T}{R_T + h} \text{ soit } v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R_T + h}}.$$

3. a. On a $v = \frac{2\pi(R_T + h)}{T}$. En remplaçant la vitesse par la relation précédente, on obtient :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{G \cdot M_T}}$$

b. $T = 2\pi\sqrt{\frac{(6{,}37 \times 10^6 + 1{,}38 \times 10^7)^3}{6{,}67 \times 10^{-11} \times 6{,}0 \times 10^{24}}}$

$= 2{,}8 \times 10^4 \text{ s} = 7{,}9 \text{ h}$

c. Les satellites font un peu plus de trois tours de la Terre.

19 **1.** Il s'agit du référentiel héliocentrique.

2. On a : $v = \sqrt{\frac{G \cdot M_S}{r}}$ et, pour une révolution, on a : $v = \frac{2\pi r}{T}$.

Donc $\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 = \frac{G \cdot M_S}{r}$, d'où $\frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \frac{G \cdot M_S}{r}$.

Ainsi : $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_S}$.

3. On peut montrer que :

$\frac{T^2}{r^3} = \text{constante} = 2{,}95 \times 10^{-19} \text{ s}^2 \cdot \text{m}^{-3}$.

Planète	***a*** (m)	***T*** (s)	$\frac{T^2}{r^3}$ ($\text{s}^2 \cdot \text{m}^{-3}$)
Mercure	$5{,}81 \times 10^{10}$	7 573 824	$2{,}93 \times 10^{-19}$
Vénus	$1{,}08 \times 10^{11}$	19 407 924	$2{,}95 \times 10^{-19}$
Terre	$1{,}50 \times 10^{11}$	31 557 600	$2{,}95 \times 10^{-19}$
Mars	$2{,}28 \times 10^{11}$	59 328 288	$2{,}97 \times 10^{-19}$
Jupiter	$7{,}80 \times 10^{11}$	375 535 440	$2{,}97 \times 10^{-19}$
Saturne	$1{,}42 \times 10^{12}$	927 793 440	$2{,}97 \times 10^{-19}$
Uranus	$2{,}88 \times 10^{11}$	2 650 838 400	$2{,}94 \times 10^{-19}$
Neptune	$4{,}50 \times 10^{12}$	5 207 004 000	$2{,}98 \times 10^{-19}$

23 **Étude de l'orbiteur *Exomars Trace Gas Obiter* (ETGO)**

1. Le référentiel est le **référentiel marsocentrique** considéré comme galiléen

2. L'expression de la force gravitationnelle appliquée au satellite s'écrit :

$\vec{F} = G\frac{M_M \cdot m_S}{(R_M + h)^2}\vec{n}$; où $\vec{n}$ est le vecteur élémentaire lié au repère de Frenet.

3. $m_S \cdot \vec{a} = \vec{F} = G\frac{M_M \cdot m_S}{(R_M + h)^2}\vec{n}$

or l'accélération dans le repère de Frenet s'écrit :

$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau} + \frac{v^2}{R_M + h} \cdot \vec{n}$ donc la relation précédente devient :

$m_S \cdot \frac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau} + m_S \cdot \frac{v^2}{R_M + h} \cdot \vec{n} = G\frac{M_M \cdot m_S}{(R_M + h)^2}\vec{n}$. Ainsi en effectuant la projection sur $\vec{\tau}$

on obtient que : $m_S \cdot \frac{dv}{dt} = 0$ donc que $\frac{\mathbf{dv}}{\mathbf{dt}} = \mathbf{0}$. On a donc **vitesse constante.**

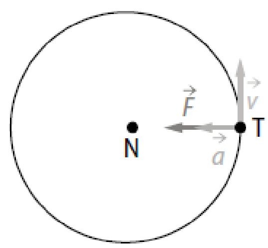
4. En projetant sur $\vec{n}$, on obtient : $m_S \cdot \frac{v^2}{R_M + h} = G\frac{M_M \cdot m_S}{(R_M + h)^2}$, en simplifiant les différents termes, on trouve que : $v^2 = G\frac{M_M}{R_M + h}$ soit : $\boldsymbol{v} = \sqrt{\frac{\mathbf{G \cdot M_M}}{\mathbf{R_M + h}}}$

24 *Les données suivantes sont manquantes dans le spécimen du professeur.*
Masse de Neptune : $M_N = 1{,}02 \times 10^{26}$ kg ; rayon de l'orbite de Triton : $R_{NT} = 3{,}55 \times 10^5$ km ; constante gravitationnelle : $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ $\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$.
Elles figurent dans le manuel élève ainsi que dans les manuels numériques.

1. Il s'agit du référentiel neptunocentrique.

2. D'après la deuxième loi de Kepler (ou loi des aires), les aires balayées pendant une même durée sont égales. Pour une trajectoire circulaire, les aires balayées pendant une même durée correspondent aux mêmes arcs de cercles parcourus, donc à la même distance parcourue sur l'orbite pour des temps identiques. Cela montre que la valeur de la vitesse est constante puisque la distance parcourue est identique pour des temps égaux.

3.



4. a. $\frac{T^2}{R_{NT}{}^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_N}$ donc $T^2 = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_N} \cdot R_{NT}{}^3$

Ainsi :

$T^2 = 2\pi\sqrt{\frac{R_{NT}{}^3}{G \cdot M_N}} = 2\pi\sqrt{\frac{(3{,}55 \times 10^8)^3}{6{,}67 \times 10^{-11} \times 1{,}02 \times 10^{26}}}$

$= 5{,}1 \times 10^5 \text{ s} = 5{,}9 \text{ jours}$

b. On a :

$v = \frac{2\pi R_{NT}}{T} = \frac{2\pi \times 3{,}55 \times 10^8}{5{,}1 \times 10^5}$

$= 4{,}4 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 4{,}4 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$

25 Étude de l'orbiteur *Mars Orbiter Mission* (MOM)

1. Le référentiel est le **référentiel marsocentrique** considéré galiléen.

2. D'après la première loi de Kepler, le centre de Mars est placé à **l'un des foyers de la trajectoire elliptique**.

3. En se servant du schéma, on voit que : $2a = h_1 + 2 \cdot R_M + h_2$;

donc : $\boldsymbol{a} = \dfrac{h_1 + 2 \cdot R_M + h_2}{2} = \dfrac{422 + 2 \times 3\,390 + 76\,994}{2} = \mathbf{4{,}21 \times 10^4\ km}$

4. On obtient $\dfrac{T^2}{a^3} = \dfrac{T_P^2}{R_P^3}$ donc $T^2 = \dfrac{T_P^2}{R_P^3} \cdot a^3$

soit $T = T_p\sqrt{\dfrac{a^3}{R_P^3}} = 459 \times \sqrt{\dfrac{(4{,}21 \times 10^7)^3}{(9\,377 \times 10^3)^3}} = 4{,}37 \times 10^3$ min soit près de 73 heures.

32

1. Le référentiel est le centre de la naine rouge Gliese 581, lié à un repère dont les axes sont dirigés vers des étoiles fixes.

2. $M_{\text{étoile}} = \dfrac{4\pi^2 \cdot a^3}{G \cdot T^2}$

$= \dfrac{4\pi^2 \times (7{,}2993 \times 10^{-2} \times 1{,}5 \times 10^{11})^3}{6{,}67408 \times 10^{-11} \times (12{,}9191 \times 24 \times 3\,600)^2}$

$= 6{,}231516 \times 10^{29}$ kg

3. $u(M) = M \cdot \sqrt{\left(\dfrac{u(G)}{G}\right)^2 + \left(3 \times \dfrac{u(a)}{a}\right)^2 + \left(2 \times \dfrac{u(T)}{T}\right)^2}$

$u(M) = 6{,}231516 \times 10^{29}$

$\times \sqrt{\left(\dfrac{0{,}00031}{6{,}67408}\right)^2 + \left(3 \times \dfrac{2{,}2 \times 10^{-5}}{7{,}2993 \times 10^{-2}}\right)^2 + \left(2 \times \dfrac{5{,}8 \times 10^{-3}}{12{,}9191}\right)^2}$

$u(M) = 7{,}9 \times 10^{26}$ kg $= 0{,}0079 \times 10^{29}$ kg

$M_{\text{étoile}} = 6{,}2315 \times 10^{29} \pm 0{,}0079 \times 10^{29}$ kg

L'intervalle de confiance est donc :

$6{,}2236 \times 10^{29}$ kg $< M_{\text{étoile}} < 6{,}2304 \times 10^{29}$ kg

4. $M_{\text{ref}} = 0{,}31 \times 1{,}989 \times 10^{30}$ kg

$= 0{,}617 \times 10^{30}$ kg

$\dfrac{|M_{\text{mes}} - M_{\text{ref}}|}{u(M)} = \dfrac{|6{,}2315 \times 10^{29} - 6{,}17 \times 10^{29}|}{7{,}9 \times 10^{26}} = 7{,}78$

L'écart est supérieur à l'incertitude-type.

19 Neptune et Néréide

1. D'après le doc. **A**, on constate que $b < a$. Dans le référentiel centré sur Neptune, le mouvement de Néréide n'est pas circulaire.

2. a. D'après la deuxième loi de Newton appliquée au centre de masse de Triton dans le référentiel neptunocentrique, on a :

$\vec{F}_{N/T} = m\,\vec{a}$ avec $\vec{F}_{N/T} = G \times \dfrac{m \times M_N}{r_{\text{Triton}}^2}\vec{u}_n$.

Il vient $\vec{a} = G \times \dfrac{M_N}{r_{\text{Triton}}^2}\vec{u}_n$.

On a donc $\vec{a}\begin{cases} a_n = G \times \dfrac{M_N}{r_{\text{Triton}}^2} \\ a_t = 0\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \end{cases}$.

La coordonnée normale de l'accélération a pour expression :

$a_n = \dfrac{v^2}{r_{\text{Triton}}}$.

D'où $G \times \dfrac{M_N}{r_{\text{Triton}}^2} = \dfrac{v^2}{r_{\text{Triton}}}$. Ainsi $v = \sqrt{\dfrac{G \times M_N}{r_{\text{Triton}}}}$.

La période de révolution de Triton est égale à la durée mise par ce satellite pour faire un tour complet de trajectoire circulaire à la vitesse de valeur v :

$T_{\text{Triton}} = \dfrac{2\pi \times r_{\text{Triton}}}{v}$ avec $v = \sqrt{\dfrac{G \times M_N}{r_{\text{Triton}}}}$.

$T_{\text{Triton}} = 2\pi \times r_{\text{Triton}}\sqrt{\dfrac{r_{\text{Triton}}}{G \times M_N}}$;

soit $T_{\text{Triton}} = 2\pi \times \sqrt{\dfrac{r_{\text{Triton}}^3}{G \times M_N}}$.

En élevant au carré, on obtient :

$\dfrac{T_{\text{Triton}}^2}{r_{\text{Triton}}^3} = \dfrac{4\pi^2}{G \times M_N}$ = constante, c'est la troisième loi de Kepler.

b. $\dfrac{T_{\text{Triton}}^2}{r_{\text{Triton}}^3} = \dfrac{(5{,}877\ \text{j})^2}{(3{,}547 \times 10^5\ \text{km})^3} = 7{,}740 \times 10^{-16}\ \text{j}^2 \cdot \text{km}^{-3}$.

3. $\dfrac{T_{\text{Néréide}}^2}{a_{\text{Néréide}}^3} = \dfrac{(360\ \text{j})^2}{(5{,}513 \times 10^6\ \text{km})^3} = 7{,}73 \times 10^{-16}\ \text{j}^2 \cdot \text{km}^{-3}$.

Ces rapports sont bien égaux, aux arrondis près. Cela confirme que ces deux satellites orbitent autour du même astre central.

4. On peut généraliser à une orbite elliptique :

$\dfrac{T^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2}{G \times M}$ où a est le demi-grand axe de l'orbite elliptique du satellite, T sa période de révolution autour de cet astre central et M la masse de l'astre central.

14 Balance cosmique

1. Dans le référentiel héliocentrique considéré galiléen, la deuxième loi de Newton appliquée au centre de masse d'une planète donne :

$\vec{F}_{S/P} = m\,\vec{a}$ avec m la masse d'une planète,

et $\vec{F}_{S/P} = G \times \dfrac{m \times M_S}{r^2}\vec{u}_n$; d'où $\vec{a} = G \times \dfrac{M_S}{r^2}\vec{u}_n$.

On a donc $\vec{a}\begin{cases} a_n = G \times \dfrac{M_S}{r^2} \\ a_t = 0\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \end{cases}$

La coordonnée normale de l'accélération $a_n = \dfrac{v^2}{r}$.

Par identification, $\dfrac{v^2}{r} = G \times \dfrac{M_S}{r^2}$ ainsi $v = \sqrt{\dfrac{G \times M_S}{r}}$.

La valeur de la vitesse d'une planète dans le référentiel héliocentrique est $\sqrt{\dfrac{G \times M_S}{r}}$ avec r le rayon de leur trajectoire supposée circulaire.

2. La période de révolution des planètes est égale à la durée mise par ces planètes pour faire un tour complet du Soleil à la vitesse de valeur v suivant une trajectoire circulaire : $T = \dfrac{2\pi \times r}{v}$.

Or $v = \sqrt{\dfrac{G \times M_S}{r}}$.

Il vient $T = \dfrac{2\pi \times r}{\sqrt{\dfrac{G \times M_S}{r}}}$, d'où $T = 2\pi \times r\sqrt{\dfrac{r}{G \times M_S}}$

soit $T = 2\pi \times \sqrt{\dfrac{r^3}{G \times M_S}}$.

3. En élevant au carré, $T^2 = 4\pi^2 \times \dfrac{r^3}{G \times M_S}$; soit $\dfrac{T^2}{r^3} = \dfrac{4\pi^2}{G \times M_S}$.

G et M_S sont des constantes, donc $\dfrac{T^2}{r^3}$ = constante, ce qui vérifie la troisième loi de Kepler dans le référentiel héliocentrique.

4. À partir de $\dfrac{T^2}{r^3} = \dfrac{4\pi^2}{G \times M_S}$, on isole M_S ; soit $M_S = \dfrac{4\pi^2}{G \times T^2} \times r^3$.

En prenant les valeurs de T et r pour Mars, il vient :

$$M_S = \frac{4\pi^2 \times (2{,}28 \times 10^{11}\,\mathrm{m})^3}{6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}} \times (1{,}88 \times 3{,}156 \times 10^7\ \mathrm{s})^2}$$

$M_S = 1{,}99 \times 10^{30}$ kg.

5. Pour un astre possédant des satellites et connaissant les paramètres orbitaux de ces satellites (période et demi-grand axe de l'ellipse), il est possible de déterminer la masse de l'astre attracteur. La troisième loi de Kepler joue alors le rôle de balance cosmique.

16 Éris et Dysnomia

1. Le référentiel permettant d'étudier Dysnomia est lié au centre d'Éris.

2. $\vec{F}_{E/D} = G \times \dfrac{m \times M_E}{r_D{}^2}\,\vec{u}$ où m est la masse de Dysnomia et $\vec{u}$ est un vecteur unitaire attaché au repère de Frenet liée à Dysnomia qui pointe vers le centre d'Éris.

La deuxième loi de Newton appliquée au centre de masse de Dysnomia permet d'écrire :

$\vec{F}_{E/D} = m\,\vec{a}$ d'où $\vec{a} = G \times \dfrac{M_E}{r_D{}^2}\,\vec{u}$.

Le vecteur accélération $\vec{a}$ du centre de masse de Dysnomia est perpendiculaire à sa trajectoire et pointe vers le centre d'Éris. Sa valeur $a = G \times \dfrac{M_E}{r_D{}^2}$.

3. La coordonnée normale de l'accélération a pour expression :

$a_n = \dfrac{v^2}{r_D}$. On a donc $\dfrac{v^2}{r_D} = G \times \dfrac{M_E}{r_D{}^2}$, ainsi $v = \sqrt{\dfrac{G \times M_E}{r_D}}$.

La période de révolution de Dysnomia est égale à la durée mise par ce satellite pour faire un tour complet d'Éris à la vitesse de valeur v suivant une trajectoire circulaire :

$T_D = \dfrac{2\pi \times r_D}{v}$ et $v = \sqrt{\dfrac{G \times M_E}{r_D}}$.

Il vient $T_D = \dfrac{2\pi \times r_D}{\sqrt{\dfrac{G \times M_E}{r_D}}}$; d'où $T_D = 2\pi \times r_D \sqrt{\dfrac{r_D}{G \times M_E}}$,

soit $T_D = 2\pi \times \sqrt{\dfrac{r_D{}^3}{G \times M_E}}$.

4. En élevant au carré, $T_D{}^2 = 4\pi^2 \times \dfrac{r_D^3}{G \times M_E}$.

D'où $M_E = \dfrac{4\pi^2}{G \times T_D{}^2} \times r_D{}^3$.

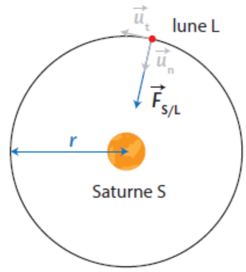
$$M_E = \frac{4\pi^2 \times (3{,}60 \times 10^7\,\mathrm{m})^3}{6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}} \times (15{,}0 \times 24 \times 3600\ \mathrm{s})^2}$$

$M_E = 1{,}64 \times 10^{22}$ kg.

La masse d'Éris est $1{,}64 \times 10^{22}$ kg.

20 Les lunes de Saturne

1.a. et **b.** Voir schéma ci-dessous.



c. $\vec{F}_{S/L} = G \times \dfrac{m \times M_S}{r^2}\,\vec{u}_n$.

2. Dans le référentiel saturnocentrique, la deuxième loi de Newton appliquée au centre de masse de la lune donne : $\vec{F}_{S/L} = m\,\vec{a}$.

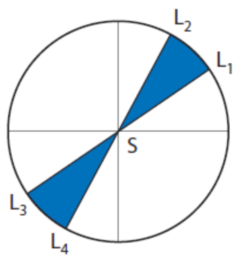
Or $\vec{F}_{S/L} = G \times \dfrac{m \times M_S}{r^2}\,\vec{u}_n$, d'où $\vec{a} = G \times \dfrac{M_S}{r^2}\,\vec{u}_n$.

3.a. On a donc $\vec{a}\begin{cases} a_n = G \times \dfrac{M_S}{r^2} \\ a_t = 0\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} \end{cases}$.

La coordonnée tangentielle de l'accélération $a_t = \dfrac{dv}{dt}$ est nulle, donc la valeur de la vitesse de la lune est constante : le mouvement est uniforme dans ce référentiel.

b. D'après la deuxième loi de Kepler, le segment de droite SL, reliant les centres de Saturne et de sa lune, balaie des aires égales pendant des durées égales.

Lorsque la trajectoire est circulaire, les distances parcourues (L_1, L_2) et (L_3, L_4) pendant une même durée sont égales.



4. La coordonnée normale de $\vec{a}$ est :

$a_n = \dfrac{v^2}{r}$.

Par identification, $G \times \dfrac{M_S}{r^2} = \dfrac{v^2}{r}$ d'où $v = \sqrt{\dfrac{G \times M_S}{r}}$.

Le vecteur vitesse $\vec{v}$ du centre de masse de la lune est tangent à la trajectoire, orienté dans le sens du mouvement et sa valeur est $v = \sqrt{\dfrac{G \times M_S}{r}}$.

5.a. La période de révolution de la lune est égale à la durée mise par ce satellite pour faire un tour complet de Saturne à la vitesse de valeur v suivant une trajectoire circulaire : $T = \dfrac{2\pi \times r}{v}$.

Il vient $T = 2\pi \times r \times \sqrt{\dfrac{r}{G \times M_S}}$.

La période de révolution de cette lune s'exprime par :

$T = 2\pi \times \sqrt{\dfrac{r^3}{G \times M_S}}$.

b. On isole M_S : $T^2 = 4\pi^2 \times \dfrac{r^3}{G \times M_S}$; donc $M_S = \dfrac{4\pi^2}{G \times T^2} \times r^3$

$$M_S = \frac{4\pi^2 \times (2{,}29 \times 10^{10}\,\mathrm{m})^3}{6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}} \times (3{,}54 \times 3{,}156 \times 10^7\ \mathrm{s})^2}.$$

La masse de Saturne est $5{,}69 \times 10^{26}$ kg.

6. Si Métis est une lune de Saturne on a : $\dfrac{T^2_{\text{Métis}}}{r^3_{\text{Métis}}} = \dfrac{T^2_{\text{L}}}{r^3_{\text{L}}}$.

On calcule $\dfrac{T^2_{\text{L}}}{r^3_{\text{L}}}$ et $\dfrac{T^2_{\text{Métis}}}{r^3_{\text{Métis}}}$.

$$\frac{T^2_{\text{L}}}{r^3_{\text{L}}} = \frac{\left(3{,}54 \times 3{,}156 \times 10^7\ \text{s}\right)^2}{\left(2{,}29 \times 10^{10}\,\text{m}\right)^3} = 1{,}04 \times 10^{-15}\,\text{s}^2 \cdot \text{m}^{-3}.$$

$$\frac{T^2_{\text{Métis}}}{r^3_{\text{Métis}}} = \frac{\left(0{,}295 \times 24 \times 3600\ \text{s}\right)^2}{\left(1{,}28 \times 10^{8}\,\text{m}\right)^3} = 3{,}10 \times 10^{-16}\,\text{s}^2 \cdot \text{m}^{-3}.$$

$\dfrac{T^2_{\text{L}}}{r^3_{\text{L}}} \neq \dfrac{T^2_{\text{Métis}}}{r^3_{\text{Métis}}}$ donc Métis n'est pas une lune de Saturne.

59 Résolution de problème Mission Apollo 14

QUESTIONS PRÉLIMINAIRES

a. Reprendre les démonstrations du cours en adaptant les notations pour montrer que $v = \sqrt{\dfrac{GM_L}{R_L + h}}$.

b. La communication entre les astronautes sur la Lune et leur collègue resté dans la capsule ne peut se faire que sur la partie de l'orbite représentée en rouge, car en dehors de cette portion d'orbite la capsule est sous l'horizon et les ondes ne l'atteignent pas.

PROBLÈME

On exprime $\cos\beta = \dfrac{R_L}{R_L + h}$ d'où $\beta = 19{,}9°$.

Un tour entier, 360°, correspond à l'orbite entière, de longueur $2\pi(R_L + h)$.

La longueur de l'orbite en rouge a pour angle au centre 2β, donc sa longueur est :

$$L = 2\pi(R_L + h)\frac{2\beta}{360°} = 1{,}28 \times 10^6\ \text{m}$$

La vitesse de la capsule est : $v = \sqrt{\dfrac{GM_L}{R_L + h}} = 1{,}63 \times 10^3\ \text{m·s}^{-1}$

La durée de communication possible à chaque tour est donc $\dfrac{L}{v} = 789$ s, soit un peu plus de treize minutes.